

رسالة لابن البناء المراكشي في الاعداد التامة والزائدة والناقصة والمتحابة

تحقيق : محمد سويسى

يندرج الفصل الذي نقدّم تحقيقه والتعليق عليه ضمن مجموعة اصطلاحية من مخطوطات على ملكنا كلّها في مادة الرياضيات منها ما اختصّ بالهندسة ومنها ما كان خاصّاً ببعض أبواب الحساب والجبر ، ومن بين الرسائل التي جاءت فيها ثلاث « للشيخ الفقيه القدوة أبي العباس الصالح الورع أبي عبد الله محمد بن عثمان الأزدي الشهير بابن البناء » المراكشي : أحداها رسالة في « الاشكال المساحية » حققتها وعلقت عليها وتشرفت بإرسالها إلى كلية الآثار بجامعة القاهرة مساهمة منّي في احتفالها بعيدها الذهبي ؛ وثانيها هذه الرسالة الخاصة بالاعداد التامة والزائدة والناقصة والمتحابة وكنت قدّمت ترجمتها إلى الفرنسية والانجليزية وتعليقاتي عليها للمؤتمر الدولي الخاص بتاريخ العلوم الرياضية الذي انعقد بكراتشي (باكستان) في شهر جويلية الماضي 1975 (1) . وأما باقي هذه الرسائل فهي الآتية :

— الايضاح على أصول المساح 35 ورقة

(1) طلب مني اثر ذلك الاستاذ Boris Rosenfeld من جامعة موسكو أن أوافيه بالنص العربي فأرسلت له نسخة من هذه الرسالة في 28 أكتوبر الفارط .

- التنبيه على المواضع من كتاب اقليدس التي أخذت منها المقدمات التي قدمت على الاعمال العددية في كتاب الجبر والمقابلة (لابن البناء)
- رسالة خاصة بالمثلثات المتشابهة بتبديء هكذا : فائدة كل مثلثين زواياه النظائر متساوية الخ ، 10 ورقات
- ارتفاع ما يمكن الوصول إليه أولا : 5 ورقات
- المثلث المجهول : 10 ورقات ونصف ، فيها نقص باخرها (فيها استشهاد بشرح ابن هيدور لتخليص ابن البناء وفيها ذكر لبعض وحدات المساحة بالمغرب منها المرجع)
- التمهيد والتيسير في قواعد التكسير ، 8 ورقات ونصف
- في علم المساحة (منقول عن « اقدار الرائض على الفتق في الفرائض لبرهان الدين ابراهيم بن عمر السنوبي (كذا) الطرابلسي الشافعي) 6 ورقات ونصف .

ورسالتنا هذه تشتمل على 5 ورقات ونصف كل منها فيه 17 سطرا من قطع 5، 7 صم ، وكنا أشرنا إليها في ترجمتنا لابن البناء التي صدرنا بها تحقيقنا لكتابه « تلخيص أعمال الحساب » (2) .

على أننا لم نقف لها على ذكر في عامة المعاجم والفهارس والغالب على الظن — فيما وصل إليه علمنا اليوم — ان هذا مخطوط فريد ، وذلك ما يزيده قيمة ، خاصة وان قيمته العلمية جلية اذ يعرض فيه صاحبه بعض اكتشافاته في باب مهم من أبواب نظرية العدد طالما شغل بال الباحثين ، وهو امتداد وتطبيق لباب الاعداد الأولية ، فنجد فيه خواص طريفة لبعض الاعداد في حد ذاتها أو لمجموعة من الاعداد باضافة بعضها إلى بعض .

ومن الناحية الشكلية ان خط هذه الرسالة مغربي جميل في الجملة الا أن الناسخ كثيرا ما سها عن الاعجام حيث كان يجب أن يوضع أو وضعه في غير محله ، كما نجد الكثير من الاخطاء في اللغة والرسم ، وأشرنا أيضا إلى سقط تغيير به المعنى العلمي فاصلحناء حسبما يقتضيه المنطق والعلم .

رسالة ابن البناء في الاعداد التامة

(فصل) * وقد وعدنا في أول الكتاب (3) أن نلحق في آخره (4) ما يمكن من الابواب الاربعة التي اغفلها المصنف وهي (باب) العدد التام والزائد (5) والناقص والاعداد المتحابه .

(الاول) العدد التام هو الذي تكون أجزاؤه مساوية (6) لجملته من غير زيادة ولا نقصان (ومثاله) ستة وكذلك أيضا ثمانية وعشرون إلى (7) غيرها من الامثلة .

وقانون (8) استخراجها أن ترتب أعدادا يكون الواحد أولها والذي يليه اثنين ثم تتبع ذلك ، كل عدد هو زوج زوج على (9) توالي أزواج الأزواج هكذا (1.2.4.8.16.32) فاذا جمع الواحد إلى الاثنين كان المجتمع منهما ثلاثة [3] وهو عدد أول ، فاذا ضرب في آخر (10) مجموع وهو الاثنان كان الخارج ستة ، وهو عدد تام . فاذا اجتمع الواحد إلى (7) الاثنين إلى (7) الاربعة كان المجتمع سبعة ، وهو أول ، فاذا ضرب في آخر مجموع وهو الاربعة كان (11) الخارج ثمانية وعشرين [28] وهو عدد تام .

(هـ) ما بين قوسين جاء في الاصل المخطوط مكتوبا بالحبر الأحمر .

(3) لم يذكر اسم الكتاب ، وليس فيما سبق في المجموعة من الرسائل ما يمكن أن يهدي إليه .

(4) خ : آخره

(5) خ : الزايد

(6) خ : متساوية

(7) خ : إلى

(8) : قانون

(9) خ : علي

(10) خ : آخر

(11) خ : فكان

فصل وقد وعدنا في أول الكتاب أن نحقق
 في آخره ما يمكن من الأبواب الأربعة التي اغفلها المصنف
 وهي باب العدد التام والزائد والناقص والأعداد
 المتحاببة الأول العدد التام هو الذي يكون اجزأؤه
 متساوية لجملة من غير زيادة ولا نقصان ومثاله
 ستة وكذا لك أيضا ثمانية وعشرون إلى غير هاتين
 الأمثلة وقنون استخراجها أن ترتب أعدادا يكون
 الواحد أولها والذي يليه اثنين ثم تتبع ذلك
 كل عدد هو زوج زوج عليه توالي أزواج الأزواج هكذا
 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
 المجتمع منها ثلاثة وهو عدد أول فاذا ضرب في آخر
 مجموع وهو الاثنان كان الخارج ستة وهو عدد تام
 فاذا جمع الواحد إلى الاثنين إلى الأربعة كان المجتمع
 سبعة وهو أول فاذا ضرب في آخر مجموع وهو الأربعة
 فكان الخارج ثمانية وعشرين 24 وهو عدد تام
 واذا جمع الواحد إلى الاثنين إلى الأربعة إلى الثمانية
 كان المجتمع خمسة عشر فاذا ضرب في آخر

مجموع

مجموع وهو ثمانية كان الخارج مائة وعشرين
 20 وهو عدد تمام الثاني العدد الزايد التي تكون
 اجزاؤه اكثر منه اذا جمعت ومثاله اثنا عشر
 وكذلك عشرون الى غير ذلك من الامثلة
 وقانون استخراج العدد الزايد ان تصنع اعداد
 زوج الزوج والواحد او لها على ما تقدم هكذا
 12 20 28 36 44 52 60 68 76 84 92 100
 اعداد زوج الزوج على التوالي واضرب اخرها
 في عدد اول اقل من المجموع المفروض في المسئلة
 فان الخارج عدد زايد وقد زيا دته اعني زيادة
 اجزائه على مجموعة قد زادت جملته على المضروب
 فيه وببيلانه انه اذا جمع من الواحد الى الاربعة
 كاف الجميع سبعة وغاذا ضرب الاربعة التي هو
 اخر مجموع في المسئلة في ثلاثة فيخرج اثني
 عشر وهو عدد زايد واذا جمع من الواحد الى الثمانية
 وضرب الثمانية في عدد اول اقل من المجموع
 كان الخارج عدد زايد فاذا ضرب في عشرة

وإذا جمع الواحد إلى (7) الاثنين إلى (7) الثمانية كان المجتمع خمسة عشر [15] فإذا ضربت في آخر (10) مجموع وهو ثمانية كان الخارج مائة وعشرين [120] وهو عدد غير تام (12) .

(الثاني) العدد الزائد (13) الذي (14) تكون أجزاؤه أكثر منه إذا جمعت .

(ومثاله) اثنا عشر وكذلك (15) عشرون إلى (16) غير ذلك (15) من الامثلة (17) .

وقانون استخراج العدد الزائد (13) أن تضع (18) أعداد زوج الزوج والواحد أولها على (19) ما تقدم هكذا (16.8.4.2.1) فإذا جمع (20) من الواحد إلى (7) ما أردت من أعداد زوج الزوج على (9) التوالي وإذا ضرب آخرها (22) في عدد أول أقل من المجموع المفروض في المسألة فإن الخارج عدد زائد (13) وقدر زيادته أعني زيادة اجزائه على (9) مجموعته (23) قدر (24) ما زادت (25) جملة على (9) المضروب فيه .

(12) خطأ في خ : عدد تام وهذا مخالف للواقع 120 ليس عددا تاما

(13) خ : الزائد

(14) خ : التي

(15) خ : كذلك

(16) خ : إلى

(17) خ : الامثلة

(18) خ : تصنع

(19) خ : على

(20) خ : سقط جمع

(21) خ : واضرب

(22) خ : وآخرها

(23) خ : مجموعة

(24) خ : قدر

(25) خ : سقط ما

وبيانه أنه إذا جمع من الواحد إلى (7) الاربعة كان الجميع سبعة [7] فاذا ضرب الاربعة التي هي (26) آخر مجموع في المسألة في ثلاثة يخرج (27) اثنا عشر (28) وهو عدد زائد (13) .

وإذا جمع من الواحد إلى (7) الثمانية وضربت (29) ثمانية في عدد أول أقل من المجموع كان الخارج عددا زائدا (13) فاذا ضربت في ثلاثة خرج أربعة وعشرون وإذا ضربت في خمسة خرج أربعون و(29) اذا ضربت في سبعة خرج ستة وخمسون وكل واحد من هذه عدد زائد (13) واذا جمع من الواحد إلى ستة عشر كان المجتمع أحدا وثلاثين فاذا ضربت ستة عشر في ثلاثة خرج ثمانية وأربعون وإذا ضربت في خمسة خرج ثمانون وإذا ضربت في إحدى عشر كان الخارج ستة وسبعين ومائة و(31) اذا ضربت في ثلاثة عشر كان الخارج ثمانية ومائتين (32) وكل واحد من هذه الاعداد عدد زائد (33) وقدر زيادته أعني زيادة (34) أجزائه على جملة قدر زيادة المجموع على المضروب فيه (35) .

(الثالث) العدد الناقص هو الذي تكون أجزاؤه أقل منه (ومثاله) أربعة وكذلك ثمانية وكذلك ستة عشر وكذلك كل عدد هو زوج زوج ، الا أن

-
- (26) خ : هو
 (27) خ : فيخرج
 (28) خ : اثني
 (29) خ : ضرب
 (30) خ : فاذا
 (31) خ : سقط و
 (32) خ : مائتان
 (33) خ : زايد
 (34) خ : زيادته
 (35) خ : الاضروب

زوج الزوج لا يكون نقصانه عن جملته أعني نقصان أجزائه ، الا واحد خاصة ، وغيرها من الناقص يختلف .

وقانون (36) استخراجها أن تضع اعداد زوج الزوج المبدأة (37) من الواحد هكذا (16.8.4.2.1) ثم تبدأ بالجمع من الواحد إلى ما أردت ونضرب آخر (38) المجموع في عدد أول أكثر من المجموع فما خرج فهو عدد ناقص.

(2) بيانه اذا جمع من الواحد إلى (7) الاربعة كان المجموع سبعة فاذا ضربت الاربعة في عدد أول أكثر من السبعة مثل احد عشر يكون الخارج أربعة وأربعين وهو عدد ناقص . واذا ضربت في ثلاثة عشر كان الخارج اثنين وخمسين وهو عدد ناقص ، واذا ضربت في سبعة عشر كان الخارج ثمانية وستين وهو عدد ناقص . واذا جمع من الواحد إلى (7) ثمانية وضربت الثمانية في عدد أول أكثر من خمسة عشر التي هي المجموع مثل سبعة عشر يكون الخارج ستة وثلاثين ومائة وهو عدد ناقص ، وكذلك غير هذا مما (3) بعده فتأمل .

(الرابع) الاعداد المتحابية وهما عددان أحدهما زائد (33) والاخر ناقص ويكون قدر زيادة أجزاء الزائد (33) على (9) نفسه كقدر نقصان أجزاء الناقص عن نفسه ، فاذا جمعت أجزاء الزائد اجتمع منها مثل الناقص واذا جمعت (39) أجزاء الناقص اجتمع منها مثل الزائد (33) ، فاذا كانا بهذه المثابة فهما متحابان (ومثاله) مائتان وعشرون (220) والثاني أربعة وثمانون ومائتان [284] فالاول زائد (33) والثاني ناقص وزيادة أجزاء الاول على (9) جملته أربعة وستون وبها يكون مثل الثاني ، وهذا القدر بعينه هو نقصان الثاني عن الاول والله أعلم .

(36) خ : قنون

(37) خ : مبدات

(38) خ : آخر

(39) خ : اجتمعت

وقانون استخراجها بأن تضع أعداد زوج الزوج المبتدأة من الواحد هكذا (8.4.2.1) ثم تجمع ما قبل آخرها وتحفظه وهو سبعة (7) وتزيد عليها آخر المجموعة وهو أربعة [4] يكون الجميع احدى (40) عشر (11) ، ثم تنقص من المجموع الذي هو سبعة [7] العدد الذي قبل آخر ما جمعت وهو اثنان [2] يبقى (41) خمسة (5) فيحصل عدداً أحدهما خمسة (5) والاخر احدى (40) عشر (11) فتضرب أحدهما في الآخر يخرج خمسة وخمسون [55] فإذا ضربت في آخر المجموعة وهو أربعة [4] كان الخارج عشرين ومائتين وهو أحد العددين المتحابين وهو الزائد (42) ، ثم تأخذ ما (43) بعد آخر مجموع يليه وهو في هذه المسألة ثمانية (8) وتأخذ الرابع منه على (44) العكس وهو واحد فتجمعهما يكون الجميع تسعة [9] فتضربه في ثمانية [8] يخرج اثنان وسبعون [72] فتسقط منها واحداً أبداً يبقى (5) [71] وهو عدد أول فتضرب في آخر مجموع وهو أربعة وثمانون ومائتان [284] وهو العدد الثاني من الاعداد المتحابة ، وهو الناقص ، فعدد (45) [220] وعدد [284] عدداً متحابان .

ولا يكون استخراج عددين متحابين أقل من هذين فانهما أقل الاعداد المتحابة .

ومتى (46) لم يكن كل واحد من العددين المضروبين في آخر المجموع أولاً لم يخرج منهما للاعداد المتحابة .

(40) خ : احدى

(41) خ : يبقى

(42) خ : الزائد

(43) خ : لما

(44) خ : علي

(45) خ : بعدد

(46) خ : متى

ومتى (46) أردت استخراج الاعداد المتحابة التي تتلو (47) هذه رتبت أعداد زوج الزوج مبتدأة من (48) الواحد هكذا (32.16.8.4.2.1) ثم (49) تجمع ما قبل آخرها فيكون أحدا وثلاثين [31] فتريد عليه آخر المجموعة يكون سبعة وأربعون [47] ثم (50) تنقص من المجموع أولا العدد الذي قبل المزيد وهو ثمانية (8) يبقى (51) ثلاثة وعشرون [23] وهذان العددان اللذان أحدهما [23] ، والآخر [47] كل واحد منهما عدد أول ، فتضرب أحدهما في الآخر يكون (52) الخارج [1081] فتضرب ذلك (53) في آخر المجموعة وهو (16) يخرج [96 172] وهو أحد العددين المتحابين وهو الزائد (54) ، ثم تأخذ العدد الذي بعد آخر المجموعة وهو (32) فتجمعه مع الرابع قبله يكون (36) فتضربها في هذا المأخوذ الذي هو (32) يخرج [1152] فتسقط منها واحدا أبدا يبقى (51) [1151] وهو عدد أول فتضربه في آخر المجموعة الذي هو (16) يكون الخارج [18416] وهو العدد الثاني من الاعداد المتحابة وهو الناقص فعدد [17296] وعدد [18416] عددان متحابان أحدهما زائد (54) والآخر ناقص ، والله أعلم .

(قلت) تقدم أن شرط المضروب في آخر المجموعة أن يكون أول (55) أى أصم ، فالذي يذكر ذلك هو الامام الفاضل السيد أبو عبد الله الشريف المراكشي (56) رحمه الله ورضي الله عنه ، وهو مع ما (57) قبله من العمل

(47) خ : تتلوا

(48) خ : الي

(49) خ : لم تقل وهذا لا معنى له

(50) خ : كم ، وهو خطأ

(51) خ : يبقى

(52) خ : يكن

(53) خ : ذلك

(54) خ : الزايد

(55) خ : أولا

(56) خ : المراكشي

(57) خ : سقط ما

المتناقص لانه ضرب خمسة وخمسين في أربعة ليخرج (58) أحد المتحايين في المثال الاول ، فتأمله ، فانه مشكل ، والله أعلم .

(وتبين) من مجموع ما ذكرناه في هذا الفصل انه اذا اجتمعت أعداد زوج الزوج مبتدأة من الواحد ، وهو معها ، فأما أن يضرب المجموع في اخر المجموعة ، أو في غيره ، وأما أن يكون المضروب فيه عددا أول (5) أو غير أول ، فان لم يكن أول (55) لم ينتج ، وان كان أول (55) فان كان أقل من مجموع جملة الاعداد المفروضة وضربت فيه آخرها فان الخارج عدد زائد (59) ومبلغ زيادة أجزائه على جملته قدر زيادة المجموع على (60) المضروب فيه ، وان ضربت آخر الاعداد المفروضة في عدد أول أكثر من مجموعها فان الخارج عدد ناقص ومبلغ نقصان أجزائه عن جملته قدر نقصان المجموع عن المضروب فيه ، وان ضرب المجموع مزيدا عليه الآخر في المجموع عن المضروب فيه ، وان ضرب المجموع مزيدا عليه الاخر في المجموع متوقفا منه ما قبل الاخر ، وضرب الخارج في الاخر خرج أحد المتحايين وهو الزائد (59) ، وان ضرب ما بعد آخر المجموعة مضاف إليه رابعة المعكوس في نفسه من غير اضافة وأسقط من الخارج واحد ، ثم ضرب الباقي في آخر المجموعة خرج العدد الثاني من الاعداد المتحابة ، وهو العدد الناقص .

وقد أتينا على (60) ما شرطناه على (60) سبيل الاختصار ، ولو شرطنا القول في هذا الفن بكثرة التقاسيم (61) وكثرة الامثلة (62) لخرجنا عن الفائدة إلى (63) الاطالة ، وفيما ذكرناه ارشاد لمن تأمله وفهم معناه ، والله تعالى (64)

(58) خ : يخرج

(59) خ : زايد

(60) خ : علي

(61) خ : التقاسيم

(62) خ : الامثلة

(63) خ : إلى

(64) خ : تعالى

المسؤول أن يجعله خالصا لوجهه بمنه وكرمه وينفعنا بالعلم (65)
والعمل به .

وليكن (66) هذا آخر الكتاب والله الموفق للصواب وهو حسبنا ونعم
الوكيل ولا حول ولا قوة الا بالله العلي العظيم وصلى الله على سيدنا محمد و آله
عدد خلقه ورضى نفسه وزنة عرشه ومداد كلمته .

(65) خ : بالعلوم
(66) خ : وليكون

التعاليق

أ - الاعداد التامة

نذكر انه إذا كانت متوالية هندسية أول عدد فيها أو أساسها r فمجموع
ن الاعداد الاولى منها يساوي :

$$1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1} = \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

وفي الصورة الخاصة $r = 1$ ، يكون هذا المجموع
 $1 + 2 + \dots + n$

هذا وإن بعض الاعداد التي يكون شكلها $1 + 2 + \dots + n$ أعداد أولية
وسميت في القرن السادس عشر للميلاد اعداد مرسان

ويشير ابن البناء منذ القرن الثالث عشر إلى البعض منها ضمن نصّه لقانون
إيجاد الاعداد التامة ، وهما العددان $3 = 1 - 2^2$ و $7 = 1 - 2^3$. وحتى الآن
نحن لا نعلم هل ان سلسلة اعداد مرسان متناهية أم لا . ويلوح أن ابن البناء
يشترط في قانونه لإيجاد الاعداد التامة أن يكون المجموع $1 + 2 + \dots + n$ عددا أوليا :
وهو يستعمل لذلك قياس الخلف فيستشهد بمثال $15 = 1 - 2^4$ فيوجد منه العدد
120 وهو غير تام

أولى الاعداد التامة التي يتعرض إليها ابن البناء

ن = 2	$3 = 1 - 2^2$	عدد أول	$2 = 1 - 2^1$	عدد تام	6
ن = 3	$7 = 1 - 2^3$	عدد أول	$2^2 = 1 - 2^2$	عدد تام	28
ن = 4	$15 = 1 - 2^4$	غير أول	$2^3 = 1 - 2^3$	غير تام	120
ن = 5	$31 = 1 - 2^5$	عدد أول	$2^4 = 1 - 2^4$	عدد تام	496

أي ان ابن البناء يأتي بما يؤيد المقالة 36 من الكتاب التاسع من أصول
أقليدس .

إذا كان $2n-1$ عددا أوليا إذن $2n-1$ (2-1) عدد تام ويقوم فيما بعد
أولار Euler الدليل على صحة هذه المقالة فيما يخص الأعداد التامة الزوجية.

فهل هناك عدد تام فردي ؟ هذا من الصعوبة بمكان فرأى سلفستار
Sylvester وقد اهتم به حوالي 1888 أنه بمثابة مشكل تربيع الدائرة قبل ما قام
به هرميت Hermite ولندمان Lindemann من أعمال لاثبات استحالة .
وعلى كل فالمشكل ما زال معروضا على الحل* والمجال فيه مفتوح (*).

ب - الأعداد الزائدة

سائر الأمثلة التي استشهد بها ابن البناء أعداد زوجية وذلك أنها هي
الأولى ، فأول عدد زائد فردي هو 10665

شرح أمثلة ابن البناء

هب المتوالية 1 ، 2 ، 4 ، 8 ، 16 ، 32

أي 1 ، 2 ، 2² ، 2³ ، 2ⁿ

وهب المجموع : $2(1+n) - 1$ ، والعدد الأولي* لـ $2n+1-1$
اذن الجداء $2n$ لـ $2n$ عدد زائد

$$1 - 32 = 2n \text{ مجموع}$$

$$7 =$$

الأعداد الأولية التي هي أصغر من 7 هي : 3 و 5

$$12 = 4 \times 3 \leftarrow$$

أجزاء 12 هي : 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 6 ، 12

مجموعها : 16

(*) انظر Arithmétique et théorie des nombres : Jean Itard ، النشرات
الجامعية بفرنسا 1963 ص 34

$$\text{الفرق (16 - 12) = 4 = الفرق (7 - 3)}$$

$$20 = 5 \times 4 \leftarrow$$

أجزاء 20 : 1 ، 2 ، 4 ، 5 ، 10

مجموعها : 22

$$\text{الفرق (22 - 20) = 2 = الفرق (7 - 5)}$$

$$(2 \text{ اذا } n = 3 \text{ مجموع } 2^n = 4^2 - 1 =$$

$$15 =$$

الاعداد الاولى التي هي أصغر من 15 هي : 3 ، 5 ، 7 ، 11 ، 13

$$24 = 3 \times 8 \leftarrow$$

أجزاء 24 هي : 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 6 ، 8 ، 12

مجموعها : 36

$$\text{الفرق (36 - 24) = 12 = الفرق (15 - 3)}$$

$$40 = 5 \times 8 \leftarrow$$

اجزاء 40 هي : 1 ، 2 ، 4 ، 5 ، 8 ، 10 ، 20

مجموعها : 50

$$\text{الفرق (50 - 40) = 10 = الفرق (15 - 5)}$$

$$56 = 7 \times 8 \leftarrow$$

أجزاء 56 : 1 ، 2 ، 4 ، 7 ، 8 ، 14 ، 28

مجموعها : 64

$$\text{الفرق (64 - 56) = 8 = الفرق (15 - 7) الخ}$$

ج - الاعداد الناقصة

قانون ايجادها : هب المتوالية 1 ، 2 ، 2 ، 2 ... 2ⁿ ...

$$\text{مجموع حدودها حتى رتبة } n = 2^{(n+1)} - 1$$

فإذا كان العدد الأولي لكن أكبر من $2^n + 1 - 1$ فالجذء $2^n + 1 - 1$ عدد

$$7 = 1 - 2^3 \quad 2 = 1 - 2^1$$

← 11 مثلاً عدد أولي أكبر من 7

$$44 = 11 + 2^2 \quad \text{إذن عدد ناقص}$$

أجزاء 44 : 22 ، 11 ، 4 ، 2 ، 1

مجموعها : 40

$$\text{الفرق (44 - 40) = 4 = الفرق (11 - 7) الخ}$$

د - الاعداد المتحابّة

يذكر ابن البناء الزوج الأول من الاعداد المتحابّة :

الزائد 220

والناقص 284

أجزاء 220 : 110 ، 55 ، 44 ، 22 ، 20 ، 11 ، 10 ، 5 ، 4 ، 2 ، 1

مجموعها : 284

أجزاء 284 : 142 ، 71 ، 4 ، 2 ، 1

مجموعها : 220

قانون ابن البناء لايجادها : هب المتوالية 1 ، 2 ، 2 ، 2 ، ... ، 2^{n-1} ، ...

اجمع الحدود حتى رتبة n : $2^n - 1$

أضف إليها الحدّ الأخير : $2^n + 2^{n-1} - 1$

اطرح من مجموع الحدود الحدّ قبل الأخير $2^{n-2} - 2^{n-3} - 1$

سطح النتيجة تجد $9 \times 2^{n-3} - 9 \times 2^{n-2} + 1$

إذن $9 \times 2^{n-1} - 1$ عدد زائد وهو العنصر الأول من زوج الاعداد

المتحابّة .

2 - اعتبر الحدّ الموالي $2n$ والرابع قبل الاخير $2n-3$

$$\text{مجموعهما} = 2n \times 9 \times 2n-3$$

$$\text{سطحه في } 2n = 2n \times 9 \times 2n-2$$

يطرح منه 1 دائما فيكون $9 \times 2n-3 - 1$ عددا أوليا

$$\text{سطحه في } 2n-1 \text{ تجد : } 9 \times 2n-4 - 1$$

وهو العنصر الثاني أي العدد الناقص من زوج الاعداد المتحابّة

— وهنا نلاحظ أنّ لثابت بن قرة الحرّاني قانونا بسيطا لايجاد الاعداد

المتحابّة هذه خلاصته :

هب ثلاثة الاعداد الاولى المخالفة للعدد 2 :

$$\text{أ} - 3 \times 2n - 1$$

$$\text{ب} - 3 \times 2n - 1$$

$$\text{ج} - 9 \times 2n - 1$$

إذن يكون الزوج $2n$ أ ب و $2n-1$ ج عددين متحابّين وكان

فرما Fermat يعرف هذا القانون حوالي سنة 1636م فمكّنه من ايجاد زوج

الاعداد المتحابّة اذا كان $n = 4$ أي العددين 17296 و 18416 الذين سبق لابن

البناء أن أشار إليهما

— كما نلاحظ أنّ ديكارت Descartes حوالي سنة 1638 استخدم

$$\text{قانون ثابت عينه لايجاد الزوج } 9.437.056 \text{ و } 9.363.584$$

وأوجد أولار Euler فيما بعد 64 زوجا من الاعداد المتحابّة .